

УДК 514:75

DOI <https://doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2026.109.33>

Селезньова Н. П., Рудик Т. О.

ГВИНТОВІ ЛІНІЇ: ГЕОМЕТРІЯ, ЩО РУХАЄ СВІТ

Стаття присвячена актуальним теоретичним та методичним аспектам викладання курсу диференціальної геометрії в технічному університеті. Вивчення теми «Просторові криві» (зокрема гвинтові лінії) у курсі диференціальної геометрії є одним із найскладніших етапів для студентів. Це момент, де абстрактний математичний апарат (векторний аналіз) стикається з необхідністю візуалізації складних об'єктів у тривимірному просторі. У роботі обгрунтовано, що найбільш репрезентативним прикладом, який демонструє прикладну складову та логічну завершеність диференціальної геометрії є задача на знаходження натуральних рівнянь кривої, зокрема, таких характеристик як кривина та скрут. Саме на гвинтовій лінії студенти вперше бачать, як просторова форма об'єкта повністю визначається двома параметрами. В статті пропонується при викладанні курсу диференціальної геометрії поставити акцент на кінематику, тобто пояснювати вектори в триграннику Френе-Серре як швидкість та прискорення точки, порівняти обчислення у загальному та натуральному параметрах для однієї і тієї ж гвинтової лінії. Диференціальна геометрія через формули Френе-Серре вчить студентів обчислювати параметри просторової кривої – кривизну та скрут. Це база для проектування доріг, залізничних колій та траєкторій польоту апаратів. Гвинтова лінія не існує сама по собі бо, як правило, вона лежить на циліндрі або конусі. Тому у статті розглянуто та співставлено циліндричну та конічну гвинтові лінії як у параметричному вигляді, так і при натуральному параметрі (криві відносимо до довжини дуги). Побудовано та проаналізовано графіки зміни кривини для конічної гвинтової лінії при підйомі угору та проведено порівняння кривини та скруту для конічної гвинтової лінії. Окремо розглянуто випадок, коли скрут дорівнює нулю, що дозволило побачити контраст у формулах.

Ключові слова: тригранник Френе, формули Френе-Серре, кривизна кривої, скрут, циліндрична гвинтова лінія, конічна гвинтова лінія, вектор головної нормалі, вектор бінормалі.

Актуальність проведення порівняльного аналізу циліндричної та конічної гвинтової лінії в курсі викладання диференціальної геометрії полягає у перетворенні абстрактних формул диференціальної геометрії на зрозумілий інструмент аналізу просторових форм. Це місток між класичною теорією та сучасним інженерним проектуванням. Актуальність підкріплюється ще тим, що ці криві зустрічаються в реальному світі, а саме при моделюванні молекул ДНК, розрахунках пружин стиснення, кроку різьби болтів, проектуванні антен (спіральні антени), розрахунках конічних пружин, траєкторії руху об'єктів, що наближаються до центру тяжіння. Стаття [1] якраз і обгрунтовує проблемно-орієнтоване навчання як ефективний метод оптимізації математичної підготовки у технічних ЗВО, адже використання практико-орієнтованих задач формує професійні компетентності, підвищує мотивацію студентів та стимулює самостійну пізнавальну діяльність. Наукова новизна дослідження полягає у розширеному аналізі взаємозв'язку між кривою та поверхнею (циліндром або конусом), на якій вона розташована. Саме прикладам таких задач і присвячена запропонована стаття.

Мета статті – використовуючи багаторічний досвід викладання вищої математики з елементами проблемно-орієнтованого навчання на фізико-математичному факультеті Національного технічного університета України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» запропонувати різні підходи до вивчення гвинтових ліній в курсі диференціальної геометрії у технічному університеті та систематизувати базові поняття просторових кривих на прикладі гвинтової лінії.

Гвинтова лінія (або гелікс) – це просторова крива, яка поєднує в собі два типи руху: обертальний та поступальний. Хоча на перший погляд це лише абстрактна математична фігура, насправді вона є однією з фундаментальних форм нашого всесвіту – від мікроскопічних ланцюжків ДНК до гігантських спіральних галактик [3].

При дослідженні гвинтової лінії надалі нам знадобляться формули Френе [2], та тригранник Френе, що представляє собою рухому систему координат, яка супроводжує точку під час її руху вздовж просторової кривої. Ці формули описують, як змінюється сам тригранник (його орієнтація) під час руху вздовж кривої:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}; \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + k\vec{\beta}; \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \chi\vec{\nu} \quad (1)$$

Ці формули описують кінематику точки, що рухається вздовж просторової кривої, пов'язуючи похідні векторів тригранника, а саме:

s – натуральний параметр, довжина дуги;

$\vec{\tau}$ – одиничний дотичний вектор, напрямлений вздовж руху по кривій;

$\vec{\beta}$ – одиничний вектор бінормалі ($\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$);

$\vec{\nu}$ – одиничний вектор головної нормалі перпендикулярний до дотичної та напрямлений у бік вигину кривої;

k – кривизна кривої;

χ – скрут кривої.

Зауважимо, що для конічної гвинтової лінії ці рівняння складніші, ніж для циліндричної, оскільки k та χ є функціями параметра t (або s). Це означає, що крива «випрямляється» і стає менш закрученою в міру віддалення від вершини конуса. Якщо у циліндричної гвинтової лінії відношення $\frac{k}{\chi} = const$ (крива однакового нахилу), то конічна гвинтова лінія також зберігає певні властивості геодезичної лінії [2] на поверхні конуса.

Спочатку розглянемо циліндричну гвинтову лінію. З математичної точки зору, циліндрична гвинтова лінія описується як лінія, що розташована на поверхні циліндра та утворена рівномірним рухом точки по твірній, що рівномірно обертається навколо осі циліндра. Положення такої точки в будь-який момент часу описується через систему параметричних рівнянь у тривимірному просторі [2, 3].

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a \cos t; a \sin t; bt), \quad a > 0, b \neq 0, \\ x(t) &= a \cdot \cos t; \quad y(t) = a \cdot \sin t; \quad z(t) = b \cdot t \end{aligned} \quad (2)$$

де a – радіус циліндра, на який «намотана» лінія (відстань від осі циліндра до лінії), t – параметр (кут повороту), що змінюється від 0 до 2π для одного повного оберту, b – коефіцієнт підйому, який відповідає за те, наскільки стрімко лінія йде вгору.

Перейдемо до задання цієї гвинтової лінії через натуральний параметр s . Натуральний параметр – це довжина дуги:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Звідси $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$. Підставляємо в рівняння гвинтової лінії (2):

$$\vec{r}(t) = \left(a \cdot \cos \frac{s}{c}; a \cdot \sin \frac{s}{c}; \frac{bs}{c} \right).$$

Розглянемо вектори тригранника Френе (1) у натуральній параметризації.

Одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$: $\vec{\tau} = \vec{r}'(s) = \left(-\frac{a}{c} \cdot \cos \frac{s}{c}; \frac{a}{c} \cdot \sin \frac{s}{c}; \frac{b}{c} \right)$.

Головна нормаль $\vec{\nu}$. Оскільки $\vec{r}''(s) = k\vec{\nu}$ то спершу знайдемо другу похідну:

$$\vec{r}''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cdot \cos \frac{s}{c}; -\frac{a}{c^2} \cdot \sin \frac{s}{c}; 0 \right).$$

Модуль цього вектора і є кривизною k :

$$k = |\vec{r}''(s)| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4} \cos^2 \frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^4} \sin^2 \frac{s}{c}} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тоді $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''(s)}{k} = \left(-\cos \frac{s}{c}; -\sin \frac{s}{c}; 0 \right)$.

Біномаль $\vec{\beta}$: $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu} = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}; -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}; \frac{a}{c} \right)$.

Скрут χ . Використовуємо формули Френе (1): $\vec{\beta} = -\chi\vec{\nu}$.

Звідси $\vec{\beta}(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}; \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}; 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \vec{\nu}$.

Отже, $\chi = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Проведемо обчислення у загальному параметрі t . Виконаємо обчислення без заміни змінних за допомогою векторних добутків.

Похідні:

$$\vec{r}' = (a \sin t; a \cos t; b), \quad \vec{r}'' = (-a \cos t; -a \sin t; 0), \quad \vec{r}''' = (a \sin t; -a \cos t; 0). \quad (3)$$

Кривина $k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$. Обчислимо вектор $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (ab \sin t; -ab \cos t; a^2)$. Його модуль:

$$\sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}; \quad k = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Висновок: кривина гвинтової лінії стала. Це означає, що вона в кожній точці згинається однаково.

Далі обчислюємо скрут за формулою (через мішаний добуток):

$$\chi = \frac{(\vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''')}{\|[\vec{r}' \times \vec{r}'']\|^2}.$$

Після обчислення мішаного добутку маємо $\chi = \frac{ba^2}{a^2(b^2+a^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Висновок: скрут також є сталим, знак залежить від напрямку закручування лінії.

Звідси випливає добре відома *теорема Ланоре* [3]: крива є гвинтовою лінією тоді і тільки тоді, коли відношення її кривини до скриту є сталою величиною $\left(\frac{k}{\chi} = const\right)$.

Було б добре, якби цю теорему студенти змогли продемонструвати на прикладах при проведенні практичного заняття.

Тепер розглянемо вектори Френе для циліндричної гвинтової лінії: \vec{t} напрямлений вздовж дотичної до кривої; \vec{v} завжди напрямлений до осі циліндра (горизонтально); $\vec{\beta}$ утворює сталий кут з віссю OZ . Для того,

щоб знайти вектори репера Френе використаємо формули (1) Довжина вектора швидкості $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} = c$.

Вектор дотичної $\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \left(-\frac{a}{c} \sin t; \frac{a}{c} \cos t; \frac{b}{c}\right)$. Вектор бінормалі $\vec{\beta}$ колінеарний векторному добутку $\vec{r}' \times \vec{r}''$. Отже,

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2} = ac. \text{ Тоді одиничний вектор бінормалі } \vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \left(\frac{b}{c} \sin t; -\frac{b}{c} \cos t; \frac{a}{c}\right).$$

Одиничний вектор головної нормалі $\vec{v} = \vec{\beta} \times \vec{t} = (-\cos t; -\sin t; 0)$. Розглянуті вектори представлено на Рис. 1.

Розглянемо рівняння гвинтової лінії через вектори Френе.

Зв'язок між зміною векторів Френе та самою лінією описується у відношенні натурального параметра s , визначається формулами Френе-Серре (1). Отже, система диференціальних рівнянь, що визначає циліндричну гвинтову лінію через вектори Френе, має вигляд

$$\vec{t}'(s) = \frac{a}{c^2} \vec{v}; \quad \vec{v}'(s) = -\frac{a}{c^2} \vec{t} + \frac{b}{c^2} \vec{\beta}; \quad \vec{\beta}'(s) = -\frac{b}{c^2} \vec{v}.$$

Основні характеристики гвинтової лінії.

Крок гвинтової лінії – це одна з найважливіших величин для інженерів. Крок – це відстань між двома сусідніми витками, виміряна вздовж осі z (відстань, на яку точка просувається вздовж осі за один повний оберт). Цей крок пов'язаний із коефіцієнтом b наступним чином: $h = 2\pi b$.

Звідси випливає важливий *висновок:* якщо ми знаємо потрібний крок гвинта (наприклад, для болта чи свердла), ми можемо точно обчислити швидкість підйому різьби.

Довжина витка. Якщо ми «розгорнемо» один виток гвинтової лінії на площину, ми отримаємо гіпотенузу прямокутного трикутника. Один катет цього трикутника – це довжина кола основи ($2\pi a$), а інший – крок (h). Відповідно до теореми Піфагора, довжина одного витка дорівнює $L = \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$.

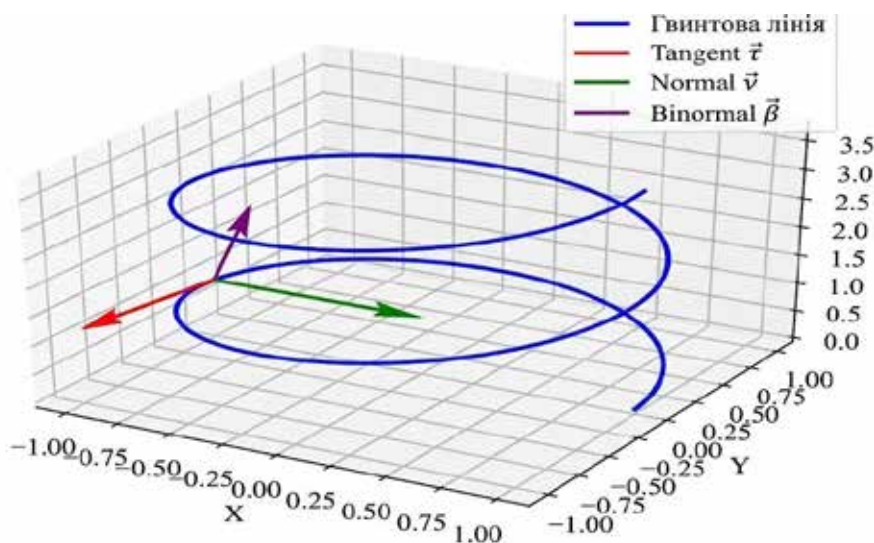


Рис. 1. Вектори тригранника Френе на гвинтовій лінії

Кут підйому – це кут, під яким нарізається різьба (кут, під яким лінія нахилена до площини основи, визначає властивості тертя та сили). Він визначається відношенням кроку до довжини кола: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi a}$. Це важливо тому, що якщо кут занадто великий, гвинт під навантаженням буде розкручуватися

сам (як у деяких інструментах). Якщо кут малий, гвинт буде надійно тримати з’єднання.

У Табл. 1 наведено ілюстративне порівняння параметрів.

Отже, гвинтова лінія – це набагато більше, ніж просто геометрична абстракція. Це унікальна інженерна та біологічна архітектура, що забезпечує ідеальний баланс між компактністю, міцністю та функціональністю. Таким чином, вивчення гвинтових ліній залишається актуальним як для фундаментальної науки, так і для прикладних розробок.

Конічна гвинтова лінія – це набагато складніший об’єкт для викладання, ніж циліндрична, оскільки її кривина та скрут не є сталими, а змінюються під час руху вздовж кривої. Найчастіше використовують два підходи до параметризації: через кутову швидкість (час) та через висоту (аплікату).

Параметризація через загальний параметр t . Цей метод описує рух точки, яка обертається навколо осі OZ зі сталою кутовою швидкістю, при цьому її радіус і висота змінюються пропорційно куту повороту. У контексті конічної гвинтової лінії термін «радіус» означає відстань від рухомої точки до центральної осі (осі OZ). Оскільки це не звичайна циліндрична пружина, а конічна, цей радіус не є сталою величиною. Він змінюється в процесі руху, що і створює форму конуса. Простими словами радіус тут – це довжина «плеча», на якому обертається точка. Чим вище піднімається точка, тим ширшим (або вужчим) стає кільце оберту.

Якщо конус задано рівнянням $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ (де k – коефіцієнт нахилу твірної), то параметричні рівняння мають вигляд:

$$x(t) = a \cdot t \cdot \cos t; \quad y(t) = a \cdot t \cdot \sin t; \quad z(t) = c \cdot t.$$

Параметри: $t \geq 0$ – кут повороту в радіанах; a – коефіцієнт, що визначає швидкість «розширення» спіралі; c – коефіцієнт, що визначає швидкість підйому вздовж осі OZ .

Зауваження: радіус кривої в горизонтальній площині $R(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot t$ прямопропорційний висоті z .

Параметризація через висоту (циліндрична логіка). Якщо зручніше прив’язатися до конкретної висоти конуса H та радіуса основи R , можна використати параметр h (поточна висота), де $h \in [0; H]$.

$$x(h) = \frac{R}{H} \cdot h \cdot \cos(\omega h); \quad y(h) = \frac{R}{H} \cdot h \cdot \sin(\omega h); \quad z(h) = h,$$

де h – координата по осі OZ (висота); R – максимальний радіус при $h = H$; ω – параметр «щільності» намотки (кількість обертів на одиницю висоти).

Для опису конічної гвинтової лінії через тригранник Френе (або Френе-Серре) нам потрібно спочатку визначити радіус-вектор кривої $R(t)$, а потім обчислити її основні диференціальні характеристики: дотичну, нормаль, бінормаль, а також кривизну та скрут.

Візьмемо стандартну параметризацію $\vec{r}(t) = (at \cos t; at \sin t; bt)$.

Для будь-якої точки на кривій можна визначити три взаємно перпендикулярні одиничні вектори:

дотичний вектор $\vec{\tau}$, напрямлений вздовж руху точки: $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$; вектор головної нормалі $\vec{\beta}$ вказує на

напрямок опуклості кривої: $\vec{\beta} = \frac{\vec{\tau}'(t)}{|\vec{\tau}'(t)|}$; вектор бінормалі $\vec{\nu}$ перпендикулярний до перших двох: $\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\beta}$.

Кривизна та скрут конічної гвинтової лінії. Кривизна та скрут – головні скалярні характеристики, що входять у формули Френе. Кривизна k показує, наскільки швидко змінюється напрям дотичної. Для конічної гвинтової лінії вони обчислюються за загальними формулами

Таблиця 1

Ілюстративне порівняння параметрів

Параметр	Вплив на форму	Де застосовується
Збільшення a	Гвинт стає ширшим («роздутим»)	Розрахунок діаметра пружин підвіски
Збільшення h	Витки стають рідшими, підйом крутішим	Швидкісні шнеки, гвинти літаків
Зміна знака b	Змінює напрямок (права або ліва різьба)	Спеціальні кріплення, що не розкручуються

$$k(t) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2(t^2+4)+c^2(t^2+2)}}{(a^2(t^2+1)+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

На відміну від звичайної циліндричної гвинтової лінії тут кривизна не є сталою і зменшується при зростанні t (коли спіраль розширюється).

На Рис. 2 представлено графік зміни кривини конічної гвинтової лінії.

На графіку (Рис. 2) ми бачимо, що в початковій точці $t = 0$ кривина є максимальною, оскільки радіус витка найменший. Зі зростанням t і висоти $z = bt$ знаменник росте швидше за чисельник, тому кривизна стрімко падає. Конічна спіраль «розкручується», стаючи все більше схожою на пряму лінію, що йде в нескінченність. Головною відмінністю від циліндричної лінії є те, що цей графік мав би бути горизонтальною прямою для циліндричної гвинтової лінії, а у конічній лінії спостерігаємо динамічне згасання. Це головна складність для студентів зрозуміти, що геометрія кривої «деформується» в процесі руху.

Скрут χ показує швидкість виходу кривої з площини.

$$\chi(t) = \frac{(\vec{r}'; \vec{r}''; \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{c(a^2t^2 + 6a^2 + c^2)}{a^2(a^2(t^2+4)+c^2(t^2+2))}$$

Порівняння кривини та скруту для конічної гвинтової лінії наочно показує, що скрут спадає значно швидше. Це відбувається тому, що для конічної лінії $\vec{r}(t)$ головні характеристики мають такі порядки зростання в знаменнику: кривина $(k) \approx \frac{1}{t^2}$ при великих t . Скрут $\chi(t) \approx \frac{1}{t^3}$ при великих t . Це означає, що крива

не просто стає «менш зігнутою», вона надзвичайно швидко стає «пласкою» (майже не виходить зі своєї дотичної площини), перетворюючись на звичайну спіраль Архімеда на площині.

На Рис. 3. представлено порівняння спадання кривини та скруту.

Кривина (червона лінія, Рис. 3) починається з високого значення і плавно спадає. Вона відповідає за те, наскільки «круто» закручена спіраль відносно центральної осі. Скрут (синя пунктирна лінія, Рис. 3) спадає значно стрімкіше. Це демонструє, що з підйомом угору витки стають де далі «горизонтальнішими» відносно попереднього положення.

Висновок: конічна гвинтова лінія – ідеальний приклад для пояснення того, що кривизна та скрут не обов'язково пов'язані лінійно. Це допомагає студентам зрозуміти третю похідну, яка входить у формулу скруту і «гасить» його значення швидше за кривизну.

Знаходження довжини дуги s . Обчислимо модуль швидкості $|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + a^2t^2 + b^2}$. Як і раніше,

позначимо $c^2 = a^2 + b^2$. Тоді довжина дуги $s(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 + a^2u^2} du$. В результаті інтегрування отримуємо доволі складну логарифмічну функцію (гіперболічний синус)

$$s(t) = \frac{t}{2} \sqrt{c^2 + a^2t^2} + \frac{c^2}{2a} \ln \left(\frac{at + \sqrt{c^2 + a^2t^2}}{c} \right)$$

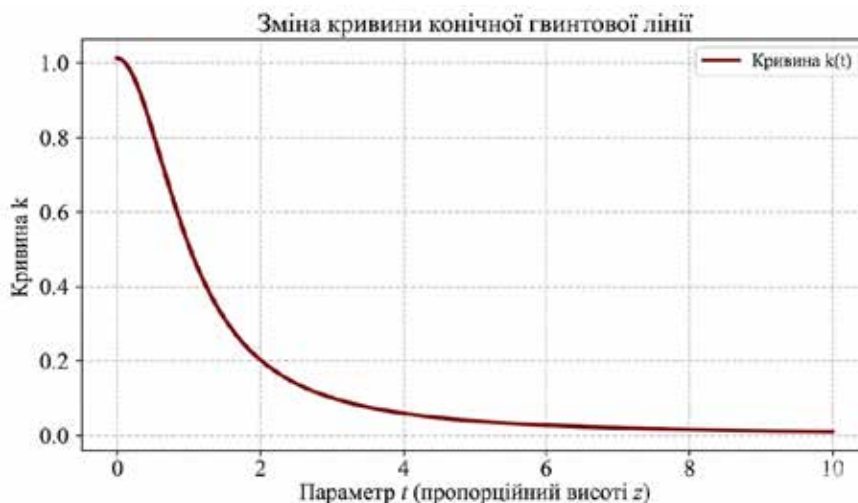


Рис. 2. Графік зміни кривини конічної гвинтової лінії

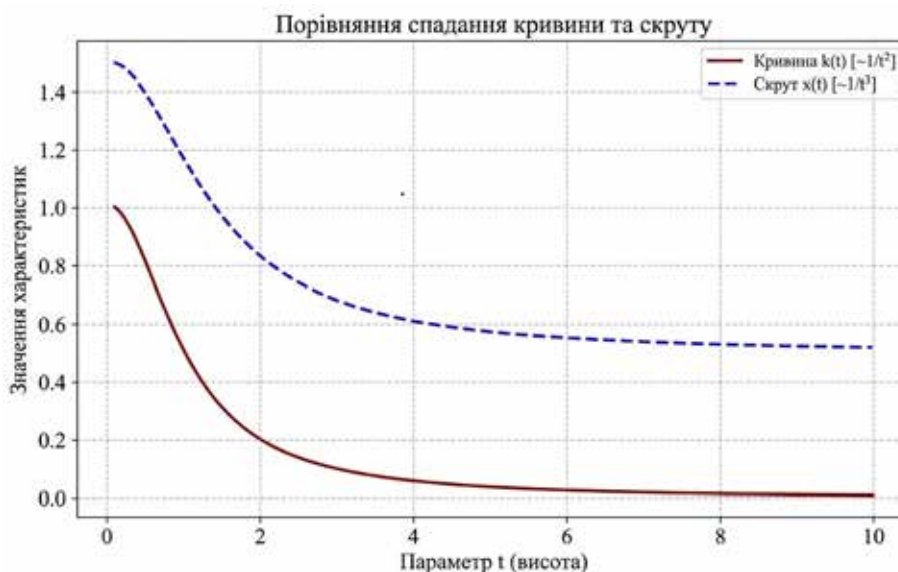


Рис. 3. Порівняння спадання кривини та скруту

Проблема переходу до s. Виразити t через s (тобто знайти $t = f(s)$) у явному вигляді неможливо. Це головна методична проблема: ми знаємо, що натуральний параметр існує, але не можемо записати векторне рівняння $\vec{r}(s)$ через прості функції. Методично доцільно порівняти характеристики циліндричної та конічної гвинтових ліній, що наведено в Табл. 2.

Висновок. Якщо в циліндричній гвинтовій лінії тригранник Френе просто обертається, зберігаючи свою форму (кути нахилу), то в конічній гвинтовій лінії він ще й змінює швидкість свого обертання відносно пройденого шляху.

Розгляд випадку, коли скрут $\chi = 0$, є критично важливим для розуміння геометрії: це математична межа, яка відокремлює просторові криві від плоских.

Якщо ми візьмемо нашу конічну гвинтову лінію $\vec{r}(t) = (at \cos t; at \sin t; bt)$ і покладемо параметр підйому $b = 0$, вона перетвориться на спіраль Архімеда на площині XOY. Порівняння формул просторової та плоскої гвинтової лінії наведено в Табл. 3.

Геометричний зміст $\chi(t) = 0$. Для спіралі Архімеда вектор бінормалі $\vec{\beta}$ стає константою $\vec{\beta} = (0; 0; 1)$. Це означає, що стична площина кривої не обертається – вона збігається з площиною XOY протягом усього руху. Саме тому скрут, який вимірює швидкість обертання цієї площини, дорівнює нулю.

Таблиця 2

Порівняння характеристик циліндричної та конічної гвинтових ліній

Характеристика	Циліндрична лінія	Конічна лінія
Кривина	$k = const$	$k(t)$ (зменшується з ростом t)
Скрут	$\chi = const$	$\chi(t)$ (змінюється)
Параметр s	$s = ct$ (лінійна залежність)	$s = f(t)$ (трансцендентна залежність)
Геометрія	Радіус кривизни сталий	Спіраль розкручується в просторі

Таблиця 3

Порівняння формул просторової та плоскої гвинтової лінії

Характеристика	Конічна гвинтова лінія ($b \neq 0$)	Спіраль Архімеда $b = 0$
Рівняння	$(at \cos t; at \sin t; bt)$	$(at \cos t; at \sin t; 0)$
Мішаний добуток	$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = b(a^2t^2 + 6a^2)$	$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = 0$
Скрут	$\chi(t) \neq 0$	$\chi(t) = 0$
Кривизна	$k(t) = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^3} = \frac{a\sqrt{a^2(t^2 + 4) + c^2(t^2 + 2)}}{(a^2(t^2 + 1) + c^2)^{\frac{3}{2}}}$ $c^2 = a^2 + b^2$	$k(t) = \frac{t^2 + 2}{a(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$

Висновки. Задача на знаходження натуральних рівнянь кривої, зокрема, таких характеристик як кривина та скрут, демонструє прикладну складову та логічну завершеність диференціальної геометрії та поглиблює знання з математичного аналізу.

Загалом курс диференціальної геометрії дає студентам не просто опис фігури, а фундаментальний математичний апарат для роботи з будь-якими кривими у просторі. Без цього курсу знання про гвинт залишаються на рівні «шкільного малювання», тоді як диференціальна геометрія перетворює їх на інструмент інженера чи науковця.

Використана література:

1. Рудик Т.О., Селезньова Н.П. Проблемно-орієнтоване навчання як один з факторів оптимізації математичної підготовки студентів у технічному університеті. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи*. Київ, 2025. Вип. 104. С. 112–117. doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2025.104.22
2. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія: навч. посіб. Київ : Вища шк., 1973. 276 с.
3. Scarpas A. Geometry of Conical Spirals in Antenna Design: Analytical and Computational Models. Delft University of Technology (TU Delft Publishing). 2018.142 p.

References:

1. Rudyk T.O., Seleznova N.P. (2025) Problemno-orientovane navchannia yak odyn z faktoriv optymizatsii matematychnoi pidhotovky studentiv u tekhnichnomu universyteti [Problem-based learning as one of the factors of optimization of mathematical training of students at the technical university]. *Naukovyi chasopys Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M.P. Dragomanova. Seriiia 5. Pedahohichni nauky: realii ta perspektyvy*. Kyiv. Vyp. 104. S. 112–117. doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2025.104.22 [in Ukrainian]
2. Kovantsov M. I. (1973) Dyferentsialna heometriia [Differential geometry]: navch. posib. Kyiv : Vyshcha shk. 276 s. [in Ukrainian]
3. Scarpas A. (2018) Geometry of Conical Spirals in Antenna Design: Analytical and Computational Models. Delft University of Technology (TU Delft Publishing). 142 p.

N. Seleznova, T. Rudyk. Helical lines: the geometry that moves the world

The article is devoted to the current theoretical and methodological aspects of teaching a course in differential geometry at a technical university. Studying the topic «Spatial Curves» (in particular, helical line) in the differential geometry course is one of the most difficult stages for students. This is the point where abstract mathematical apparatus (vector analysis) encounters the need to visualize complex objects in three-dimensional space. The paper substantiates that the most representative example that demonstrates the applied component and logical completeness of differential geometry is the problem of finding natural equations of a curve, in particular, such characteristics as curvature and torsion. It is on the helical line that students first see how the spatial shape of an object is completely determined by two parameters. The article proposes to emphasize kinematics when teaching a course in differential geometry, that is, to explain vectors in the Frenet-Serre trihedron as the velocity and acceleration of a point, to compare calculations in general and natural parameters for the same helical line. Differential geometry, through the Frenet-Serre formulas, teaches students to calculate the parameters of a spatial curve - curvature and torsion. This is the basis for designing roads, railway tracks, and aircraft flight paths. A helical line does not exist by itself because, as a rule, it lies on a cylinder or cone. Therefore, the article considers and compares cylindrical and conical helical lines both in parametric form and with a natural parameter (curves are related to the length of the arc). Graphs of changes in curvature for a conical helical line during upward movement were constructed and analyzed, and a comparison of curvature and torsion for a conical helical line was made. The case where the torsion is zero was considered separately, which allowed us to see the contrast in the formulas.

Key words: Frenet trihedron, Frenet-Serret formulas, curvature of a curve, torsion, cylindrical helical line, conical helical line, principal normal vector, binormal vector.

Дата першого надходження статті до видання: 26.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 27.03.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 22.05.2026



Стаття поширюється на умовах
ліцензії відкритого доступу
CC BY 4.0